

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

SEMAINE 4

1	Autofinancement, couverture dynamique	3
1.1	Valorisation et couverture de produit dérivé	3
1.2	Nécessité de modélisation et calcul probabiliste	4
1.3	Modèle de Black-Scholes-Samuelson	6
1.4	Portefeuille de couverture dynamique	7
1.5	Traduction du problème de couverture parfaite de l'option	10
2	Résolution par équation aux dérivées partielles	11
2.1	EDP de valorisation	11
2.2	Transformation par la formule de Feynman-Kac	13
2.3	Transformation par changement de variables	14
2.4	Commentaires sur la fonction prix	15
2.5	Formule de Black-Scholes	16

Objectif : résoudre couverture/pricing dans un modèle simplifié (Black-Scholes)

1 Autofinancement, couverture dynamique

Une seule zone monétaire, pas de risque de change.

Devise de référence (**numéraire**) : € par exemple.

1.1 Valorisation et couverture de produit dérivé

Call : droit d'acheter (mais pas l'obligation) 1 actif négociable S sur le marché à K Euros ($K = \text{prix d'exercice, strike}$) à la date future T fixée (*échéance, maturité*).

Equivalent à recevoir un flux monétaire $(S_T - K)_+$.

Deux problématiques fondamentales

1. **Valorisation**. Quel est le prix d'un tel contrat optionnel (ce qui détermine le montant de la prime que l'acheteur doit verser au vendeur à la signature du contrat) ?
2. **Couverture du risque de marché**. Quelle attitude doit adopter le vendeur une fois qu'il a vendu un tel produit et ainsi endossé (à la place de l'acheteur) le risque d'une hausse du titre à maturité ?

1.2 Nécessité de modélisation et calcul probabiliste

- Bachelier (1900) : thèse *Théorie de la spéculation*, soutenue à la Sorbonne en 1900.
- Markovitz (1952) : optimisation de portefeuille (frontière moyenne-variance) (Prix Nobel d'Économie en 1990).
- Black, Scholes et Merton (1973) : **diversifier le risque sur le temps de manière infinitésimale**
 - ▮► stratégie d'investissement dynamique (Prix Nobel d'Économie en 1997)
 - ▮► solution parfaite (**sous hypothèses de marché sans friction avec connaissance du modèle**), sans risque résiduel et explicite.

Modélisation probabiliste du marché

Espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$:

- Ω est l'ensemble de tous les scénarii de marché possibles.
- la tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
- les aléas sont générés par un mouvement brownien réel $(\widehat{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$, qui engendre une filtration croissante $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T)$, décrivant l'information disponible pour tous les acteurs du marché au fil du temps (tout le monde a la même information, pas de délit d'initié).
- la probabilité $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité historique ou objective**.

1.3 Modèle de Black-Scholes-Samuelson

Le modèle de Black-Scholes-Samuelson pour le prix de S est défini sous forme de rendement instantané par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t d\widehat{W}_t$$

avec $S_0 = x$, où $(\widehat{W}_t)_t$ est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{P}$. Ici les paramètres μ et σ dépendent du temps mais de manière déterministe.

Sous forme intégrée, cela devient

$$S_t = x e^{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) ds + \int_0^t \sigma_s d\widehat{W}_s}.$$

Propriétés (gaussiennes simples de ses rendements).

- i) $\log(S_t) - \log(S_s) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N} \left(\int_s^t (\mu_u - \frac{1}{2} \sigma_u^2) du, \int_s^t \sigma_u^2 du \right).$
- ii) Pour tout $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les accroissements relatifs $\left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1 \right\}$ sont ind. (et de même loi si coefficients constants).

C'est un **modèle log-normal** (Mouvement Brownien Géométrique=MBG(μ, σ) avec *time-dependent coefficients*) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t) = x e^{\int_0^t \mu_s ds},$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t^2) = x^2 e^{\int_0^t (2\mu_s + \sigma_s^2) ds}$$

$$\text{Var}_{\mathbb{P}}(S_t) = x^2 e^{2 \int_0^t \mu_s ds} (e^{\int_0^t \sigma_s^2 ds} - 1).$$

Notons :

- r_t **le taux d'intérêt sans risque** (taux de rémunération de l'argent placé sans risque au jour le jour).
- q_t **le taux de dividende/repo** (continu) de l'actif S

Les deux paramètres sont supposés déterministes.

1.4 Portefeuille de couverture dynamique

Une stratégie de portefeuille investi dans

- le titre S (négociable au comptant)
- le cash $\mathbf{S}_t^0 = e^{\int_0^t r_u du}$ ($1 \in$ capitalisé)

est la donnée de deux processus $(\delta_t, \pi_t^0 : t \geq 0)$ $\mathcal{F}$ -adaptés.

La valeur liquidative à la date t du portefeuille associé est égale à

$$\mathbf{V}_t = \underbrace{\pi_t^0}_{\text{montant en cash}} + \underbrace{\delta_t S_t}_{\text{montant en actif risqué}} .$$

CONVENTION (similaire au modèle binomial) : δ_t est un **nombre d'unités** de S .
On pourrait aussi raisonner en **montant** π_t ou en **proportion** (π_t/V_t) ^a.

a. mal défini si $V_t = 0$

Autofinancement (loi de conservation). Les variations de valeur du portefeuille au cours du temps excluent tout apport ou retrait d'argent qui ne soit pas lié à la gestion des liquidités et de S :

$$\begin{aligned} dV_t &= \delta_t(dS_t + q_t S_t dt) + \pi_t^0 r_t dt \\ &= \delta_t(dS_t + q_t S_t dt) + (V_t - \delta_t S_t) r_t dt \\ &= r_t V_t dt + \delta_t [dS_t - (r_t - q_t) S_t dt]. \end{aligned}$$

Définition. La valeur d'un portefeuille autofinçant a pour dynamique

$$V_t = V_0 + \int_0^t r_u V_u du + \delta_u (dS_u - (r_u - q_u) S_u du).$$

Remarque. Le processus $(V_t)_t$ est complètement déterminé par V_0 et $(\delta_t)_t$.

Le montant en cash se déduit par $\pi_t^0 = V_t - \delta_t S_t$.

1.5 Traduction du problème de couverture parfaite de l'option

Le vendeur de l'option doit déterminer un processus de couverture $(\delta_t)_t$ et une prime initiale V_0 tels que

$$dV_t = r_t V_t dt + \delta_t (dS_t - (r_t - q_t) S_t dt)$$

avec une erreur de couverture nulle (*tracking error*)

$$\epsilon_T = 0 = V_T - h(S_T),$$

où

- $h(S_T) = (S_T - K)_+$ dans le cas de la vente d'un Call,
- $h(S_T) = (K - S_T)_+$ dans le cas de la vente d'un Put,
- ou encore $h(S_T) = \mathbf{1}_{S_T > K}$ pour un Call binaire (ou Call digital).

S'il existe un tel portefeuille de couverture, l'option et le portefeuille de couverture ont même valeur en T avec probabilité 1. En vertu de l'AOA, leurs valeurs à toute date intermédiaire coïncident. En particulier, **V_0 est la valeur de l'option aujourd'hui (la prime à verser par l'acheteur au vendeur).**

2 Résolution par équation aux dérivées partielles

Hypothèse : Les coefficients σ, r, q sont déterministes du temps.

2.1 EDP de valorisation (pricing PDE)

Théorème. Soit h une fonction à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t, x)$ sur $]0, T[\times]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_t^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (r_t - q_t) x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r_t v(t, x) = 0, \\ v(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

Le flux $h(S_T)$ est répliquable par un portefeuille autofinçant, dont la valeur à la date t est $\mathbf{V}_t = \mathbf{v}(\mathbf{t}, \mathbf{S}_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta_t = \mathbf{v}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}, \mathbf{S}_t)$.

Preuve. Provient de l'identification des deux écritures de dV_t via

1. la formule d'Itô : $dv(t, S_t) = v'_x(t, S_t) dS_t + v'_t(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 v''_{xx}(t, S_t) dt,$
2. la condition d'autofinancement : $dV_t = r_t V_t dt + \delta_t (dS_t - (r_t - q_t) S_t dt).$



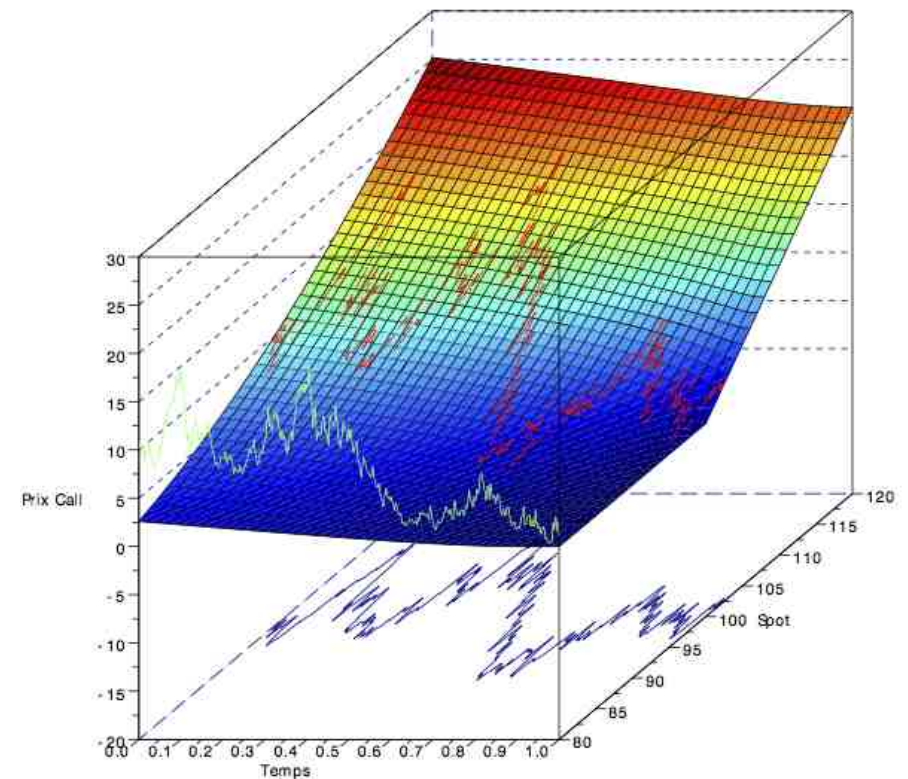
Bien différencier la fonction prix $v(t, x)$ du processus de prix $V_t = v(t, S_t)$.



L'EDP (la fonction prix) ne dépend pas de μ , le rendement du titre !



La stratégie dynamique permet de suivre l'évolution du titre, quelle qu'elle soit (haussière ou baissière).



2.2 Transformation par la formule de Feynman-Kac

Théorème (formule de Feynman-Kac). Considérons une fonction h avec $\sup_{y>0} \frac{|h(y)|}{1+y^p} < +\infty$ pour un $p \geq 0$.

Soit $\sigma_t > 0, \forall t$, et soit S un MBG(μ, σ).

La fonction $(t, S) \mapsto u(t, S) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} h(S_T) | S_t = S]$ est la solution à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} u'_t(t, S) + \frac{1}{2}[\sigma_t S]^2 u''_{S,S}(t, S) + \mu_t S u'_S(t, S) - r_t u(t, S) = 0 & \text{pour } (t, S) \in]0, T[\times]0, \infty[, \\ u(T, S) = h(S) & \text{dans }]0, \infty[. \end{cases}$$

Corollaire (pricing en risque-neutre, kernel pricing). Soit $(\tilde{S}_t)_t$ un titre fictif de dynamique :

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (r_t - q_t)dt + \sigma_t dW_t, \quad (2)$$

avec W un mouvement brownien sous une probabilité $\mathbb{Q}$. Alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par $\mathbf{v}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{S}}_T) | \tilde{\mathbf{S}}_t = \mathbf{x}]$.

2.3 Transformation par changement de variables

Supposons les paramètres σ, r, q constants.

On pose $u(t, y) = e^{r(T-t)}v(t, S_0e^{\sigma y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t})$ (passage en variable *log sous-jacent*). L'EDP de valorisation (1) devient

Théorème (équation de la chaleur).

$$\begin{cases} u'_t(t, y) + \frac{1}{2}u''_{yy}(t, y) = 0 & \text{pour } (t, y) \in]0, T[\times \mathbb{R}, \\ u(T, y) = h(S_0e^{\sigma y + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T}) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Conséquence :

$$u(t, y) = \mathbb{E}(u(T, W_T) \mid W_t = y) = \mathbb{E}(h(S_0e^{\sigma W_T + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T}) \mid W_t = y).$$

Retour aux variables initiales :

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) = \mathbb{E}(\mathbf{e}^{-\mathbf{r}(\mathbf{T}-\mathbf{t})}\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}) \mid \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{t}} = \mathbf{S})$$

avec $\tilde{S}$ actif fictif (2) de rendement r .

2.4 Commentaires sur la fonction prix

- Le **règle de prix reste linéaire** par rapport au payoff h , ce qui est satisfaisant vis-à-vis de l'AOA.
- Le titre fictif $\tilde{S}$ n'a aucune réalité financière et ne sert qu'à calculer la fonction prix de l'option (*pricing kernel*).
- Si le titre S avait pour tendance $\mu = r - q$, alors le prix aujourd'hui de l'option serait $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$, ce qui se relit comme **"le prix de l'option est la moyenne des flux futurs actualisés"**, ce qui intuitivement raisonnable.
- Si le titre S a une tendance $\mu \neq r - q$, alors la règle précédente $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$ de moyennisation sous la probabilité historique n'est plus valable. Il faut remplacer $\mathbb{P}$ par une autre probabilité $\mathbb{Q}$ (qui valorise sans tenir compte du risque de S : $\mathbb{Q} =$ **probabilité risque-neutre**). Cf arguments dans le modèle binomial.
- Dans le cas $h(x) = (x - K)_+$, on trouve la formule de Black-Scholes pour le call.

2.5 Formule de Black-Scholes

Théorème (call/put Black-Scholes, avec paramètres σ, r, q , constants).

1. La fonction prix (comptant) d'un Call de maturité T et de prix d'exercice K sur un titre du marché est donnée par

$$\text{Call}(t, x, T, K) = x e^{-q(T-t)} \mathcal{N} \left[d_+(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right] - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[d_-(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right],$$

$$\text{avec } d_{\pm}(\tau, x, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \log \left(\frac{x}{y} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau}.$$

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta_t = \text{Call}'_x(t, S_t, T, K) = e^{-q(T-t)} \mathcal{N} [d_+(T-t, S_t e^{(r-q)(T-t)}, K)]$$

parts de titre S .

3. Formules analogues pour les Puts :

$$\text{Put}(t, x, T, K) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} [d_+(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})] - x^{-q(T-t)} \mathcal{N} [d_-(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})].$$

Preuve (via un calcul fondamental de la finance de marché).

Si Z est une variable gaussienne de moyenne $m - \frac{V}{2}$ et de variance V , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(xe^Z - K)_+ = & xe^m \mathcal{N} \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m / K) + \frac{\sqrt{V}}{2} \right] \\ & - K \mathcal{N} \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m / K) - \frac{\sqrt{V}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se montre

1. en linéarisant $(xe^Z - K)_+ = xe^Z \mathbf{1}_{xe^Z > K} - K \mathbf{1}_{xe^Z > K}$;
2. en utilisant $\mathbb{P}(xe^Z > K) = \mathcal{N} \left[\frac{1}{\sqrt{V}} \ln(xe^m / K) - \frac{\sqrt{V}}{2} \right]$ (probabilité d'exercice de l'option) ;
3. en utilisant $\mathbb{E}(e^Z f(Z)) = e^m \mathbb{E}(f(Z + V))$ pour toute fonction f .

Formule de Black-Scholes avec coefficients déterministes du temps

Forme générique avec le zéro coupon $B(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$ et prix forward

$$F_t = F_t(S_T, T) = S_t e^{\int_t^T (r_s - q_s) ds}$$

Théorème (call/put Black-Scholes). Les fonctions prix (comptant) d'un Call (resp. Put) de maturité T et de prix d'exercice K sont

$$\text{Call}(t, S_t, T, K) = B(t, T) \left(F_t \mathcal{N}[d_+(t, T, F_t, K)] - K \mathcal{N}[d_-(t, T, F_t, K)] \right),$$

$$\text{Put}(t, S_t, T, K) = B(t, T) \left(K \mathcal{N}[d_+(t, T, K, F_t)] - F_t \mathcal{N}[d_-(t, T, K, F_t)] \right),$$

$$\text{avec } d_{\pm}(t, T, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}} \log \left(\frac{x}{y} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}.$$

Remarques.

— Un avant-gout de la formule de Black avec *prix forward* :

$$F_t((S_T - K)^+, T) = F_t \mathcal{N}[d_+(t, T, F_t, K)] - K \mathcal{N}[d_-(t, T, F_t, K)].$$

— Comparaison avec le cas coefficients constants : tout se passe (à l'instant t) comme si on appliquait BS-coefficients constants avec

$$r^{\text{BS}} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds, \quad q^{\text{BS}} = \frac{1}{T-t} \int_t^T q_s ds, \quad \sigma^{\text{BS}} = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds}.$$

2.6 Sensibilités (grecques), avec coefficients constants

$$\text{Call}'_S = \text{Call Spot Delta} = \Delta = e^{-q(T-t)} \mathcal{N}(d_+) \in [0, 1],$$

$$\text{Put}'_S = \text{Put Spot Delta} = -e^{-q(T-t)} \mathcal{N}(-d_+) \in [-1, 0],$$

$$\text{Call}'_K = \text{Call Strike Delta} = -e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \leq 0,$$

$$\text{Put}'_K = \text{Put Strike Delta} = e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_-) \geq 0,$$

$$\text{Call}''_{SS} = \text{Put}''_{SS} = \text{Gamma} = \Gamma = \frac{e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}} \mathcal{N}'(d_+) \geq 0,$$

$$\text{Call}'_\sigma = \text{Put}'_\sigma = \text{Vega} = Se^{-q(T-t)} \sqrt{T-t} \mathcal{N}'(d_+) = \Gamma S^2 \sigma (T-t) \geq 0,$$

$$\text{Call}'_t = \text{Call Theta} = -\frac{Se^{-q(T-t)}\sigma}{2\sqrt{T-t}} \mathcal{N}'(d_+) + qSe^{-q(T-t)} \mathcal{N}(d_+) - rKe^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \stackrel{q=0}{\leq} 0,$$

$$\text{Put}'_t = \text{Put Theta} = -\frac{Se^{-q(T-t)}\sigma}{2\sqrt{T-t}} \mathcal{N}'(d_+) - qSe^{-q(T-t)} \mathcal{N}(-d_+) + rKe^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_-),$$

$$\text{Call}'_r = \text{Call Rho} = \rho = (T-t)Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \geq 0,$$

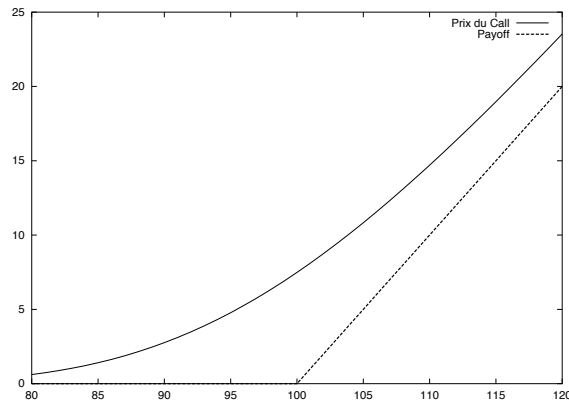
$$\text{Put}'_r = \text{Put Rho} = -(T-t)Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_-) \leq 0,$$

en omettant les arguments des fonctions d_+ et d_- .

Exemple. Paramètre : $S = 100\text{€}$, $r = 2\%$, $q = 0\%$, $\sigma = 25\%$, $T = 0.5$ (6 mois), pour un Call et un Put avec différents prix d'exercice.

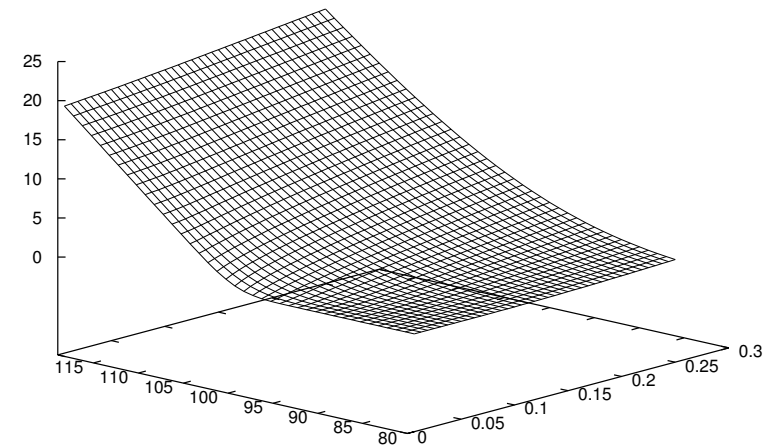
Valeurs à $t = 0$	Call $K = 95\text{€}$	Call $K = 100\text{€}$	Call $K = 105\text{€}$	Put $K = 95\text{€}$	Put $K = 100\text{€}$	Put $K = 105\text{€}$
Prix	10.2 €	7.52 €	5.37 €	4.27 €	6.52 €	9.33€
Montant en titres	66.8 €	55.8 €	44.7€	-33.2€	-44.2€	-55.2€
Montant en cash	-56.6 €	-48.28€	-39.33€	37.47€	50.72 €	64.53 €
Delta	0.668	0.558	0.447	-0.332	-0.442	-0.552
Gamma	0.0205	0.0223	0.0224	0.0205	0.0223	0.0224
Vega	25.7	27.9	28	25.7	27.9	28
Theta	-7.54	-7.94	-7.78	-5.67	-5.96	-5.70
Rho	28.3	24.1	19.7	-18.7	-25.4	-32.3

Prix de Call en fonction de S et T

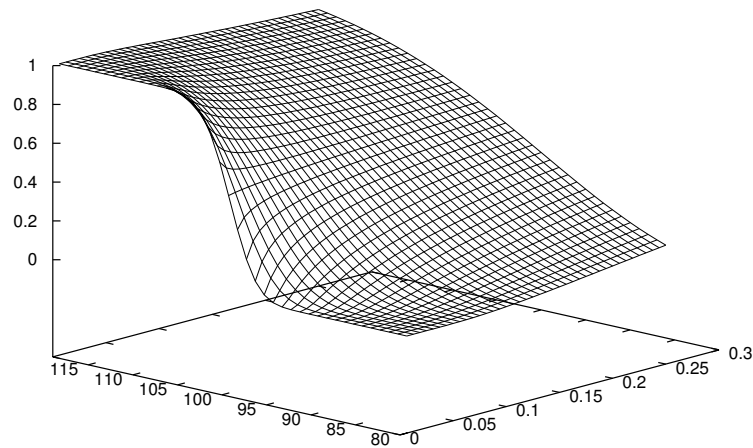


Profil de prix Call et payoff

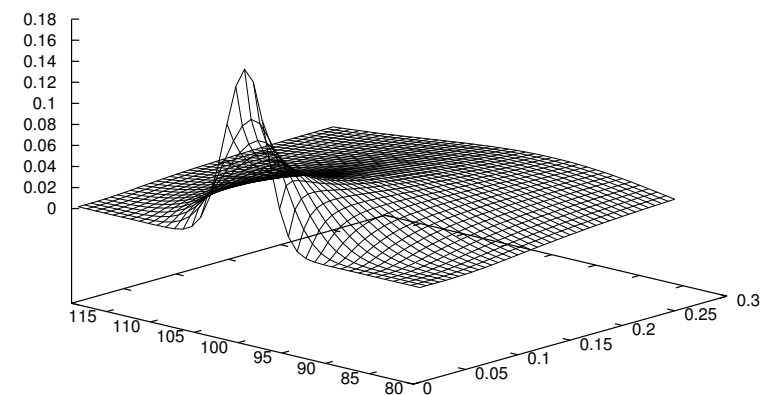
$$(x - K)_+$$



Surface de prix



Surface du Delta



Surface du Gamma